Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет. Кафедра математики
Весенний семестр 2003/2004 учебного года
Линейная алгебра

Вопросы экзаменационных билетов

1. Линейное пространство: определение, примеры. Простейшие свойства линейных пространств. Базис. Размерность. Координаты вектора. Замена базиса. Изоморфизм.

2. Линейная зависимость и независимость векторов. Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов. Теорема о базисном миноре. Ранг матрицы. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга матрицы относительно элементарных преобразований. Метод Гаусса вычисления ранга матрицы.

3. Линейные подпространства. Линейная оболочка. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Общее решение системы. Однородные системы. Фундаментальная совокупность решений.

4. Линейные операторы. Определение и простейшие свойства. Примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

5. Линейное пространство линейных операторов. Алгебра линейных операторов. Ядро и образ оператора. Обратный оператор.

6. Инвариантные подпространства линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные значения, собственные векторы, собственные подпространства. Приведение матрицы оператора к диагональной форме.

7. Билинейная форма. Матрица билинейной формы и ее преобразование при замене базиса. Квадратичная форма. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

8. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

9. Евклидовы и унитарные пространства. Примеры. Аксиомы скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами. Неравенства Коши–Буняковского. Матрица Грама. Ортогональное дополнение.

10. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Построение ортогональной проекции вектора на подпространство.

11. Ортогональные и унитарные операторы и их свойства. Ортогональные и унитарные матрицы и их свойства. Ортогональные и унитарные группы.

12. Сопряженный оператор в евклидовом и унитарном пространствах. Определение и основные свойства. Альтернатива (теорема) Фредгольма.

13. Самосопряженный оператор в евклидовом и унитарном пространствах. Определение и свойства. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора.

14. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.

15. Понятие тензора. Примеры. Алгебраические операции над тензорами: сложение, умножение, свертка. Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический

тензор. Взаимный базис. Ковариантные и контравариантные координаты вектора. (Подъем и опускание индексов.)

16. Псевдоевклидово пространство. Пространство Минковского. Группа Лоренца. Общий вид преобразования Лоренца в $\mathbb{E}_{1,1}$ (или в $\mathbb{E}_{1,3}$).

Теоретические задачи, входящие в состав экзаменационных билетов

1. Доказать, что вещественное линейное пространство квадратных матриц размера $n \times n$ представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства симметричных матриц (т.е. таких, что $A = A^T$) и подпространства кососимметричных матриц (т.е. таких, что $A = -A^T$).

2. Доказать, что вещественное линейное пространство квадратных матриц размера $n \times n$ представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства матриц с нулевым следом (т.е. матриц, сумма диагональных элементов которых равна нулю) и подпространства скалярных матриц (т.е. матриц вида kI, где k — число, I — единичная матрица).

3. Докажите, что в линейном пространстве квадратных матриц порядка n подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом, является линейным подпространством. Найдите размерность и укажите какой-либо базис этого линейного подпространства.

4. Доказать, что вещественное линейное пространство n-элементных столбцов с вещественными элементами представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства столбцов, сумма элементов которых равна нулю, и подпространства столбцов, все элементы которых равны между собой.

5. Показать, что множество столбцов с комплексными элементами является линейным пространством над полем вещественных чисел. Показать, что это же множество является линейным пространством над полем комплексных чисел. Найти размерность и указать какой-либо базис для каждого из указанных линейных пространств.

6. Является ли линейным подпространством в вещественном линейном пространстве многочленов степени не выше $2n$ множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условиям $f(1) = 0$, $f(-1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и какой-либо базис этого подпространства.

7. Матрица C_1 является матрицей перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $f_1, \ldots, f_n$, а матрица C_2 — матрицей перехода от базиса $f_1, \ldots, f_n$ к базису $h_1, \ldots, h_n$. Найти матрицу перехода от базиса $h_1, \ldots, h_n$ к базису $e_1, \ldots, e_n$.

8. Докажите, что в линейном пространстве матриц размера $n \times m$ можно ввести скалярное произведение по формуле $(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T Y)$.

9. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве, $\mathbf{A}$ — линейный оператор. Доказать равенство $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\mathbf{A} e_k, e_k)$ ($\operatorname{tr} \mathbf{A}$ — след линейного оператора $\mathbf{A}$).

10. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в евклидовом пространстве E, является ортогональным тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x} \in E$ выполняется равенство $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

11. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве U, является унитарным тогда и только тогда, когда $\forall \mathbf{x} \in U$ выполняется равенство $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

12. Доказать, что линейная комбинация эрмитовых операторов представляет собой эрмитов оператор тогда и только тогда, когда коэффициенты линейной комбинации вещественны.

13. Доказать, что произведение самосопряженных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

14. Доказать, что сумма двух собственных подпространств линейного оператора является инвариантным подпространством. Является ли эта сумма собственным подпространством? Ответ обосновать.

15. При каком условии оператор, действующий в евклидовом пространстве, является одновременно симметричным и ортогональным?

16. При каком условии оператор, действующий в унитарном пространстве, является одновременно унитарным и эрмитовым?

17. В трехмерном евклидовом пространстве свободных геометрических векторов (направленных отрезков) задан оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ — некоторый фиксированный вектор, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис, а скобки означают векторное произведение векторов. Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в указанном базисе, его ядро и образ, собственные значения и собственные векторы.

18. Доказать, что для любого линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в унитарном пространстве, оператор $\mathbf{B} = i(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$ является эрмитовым.

19. Найдите общий вид ортогональной матрицы второго порядка.

20. Найдите общий вид унитарной матрицы второго порядка.

21. Пусть X_j, Y_k — два 1-ковариантных тензора. Рассмотрим величины $A_{jk} = X_j + Y_k$. Образуют ли они тензор? Оценить ранг матрицы $A = (A_{jk})$.

Образцы экзаменационных задач

1. Найти размерность линейной оболочки данных многочленов и перечислить все базисы этой линейной оболочки, состоящие из данных многочленов: $f_1(t) = -1 + 3t + 2t^2$, $f_2(t) = 2t + 3t^2$, $f_3(t) = -1 + 7t + 8t^2$.

2. Для всех значений параметра p составить, исследовать на совместность и решить неоднородную систему линейных уравнений, заданную расширенной матрицей: $\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right)$.

3. При каждом значении параметра p найти размерность линейной оболочки данных симметричных матриц и перечислить все базисы этой линейной оболочки, состоящие из данных матриц. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить матрицу перехода от базиса пространства вещественных двухэлементных столбцов, состоящего из столбцов e_1, e_2, к базису, состоящему из столбцов f_1, f_2. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. В двумерном евклидовом пространстве $x = 2e_1 + e_2$, $y = e_1 + 3e_2$, где e_1, e_2 — ортонормированный базис. Найти угол между этими элементами и ортогональный базис в их линейной оболочке.

6. В трехмерном евклидовом пространстве столбцов скалярное произведение столбцов $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$ и $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)^T$ определяется формулой

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{k=1}^{3} x^k y^k$. Найти ортогональное дополнение к пространству решений однородной системы линейных уравнений $2x^1 - 3x^2 + x^3 = 0$.

7. Выяснить, какие из приведенных ниже билинейных форм могут задавать скалярное произведение в двумерном евклидовом, а какие — в псевдоевклидовом пространстве. Ответ обосновать. $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2$, $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2$, $F_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$.

8. Задана матрица билинейной формы в некотором базисе: $\begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. При каких значениях λ эта форма может задавать скалярное произведение в евклидовом пространстве и при каких — в псевдоевклидовом? Ответ обосновать.

9. Привести данную квадратичную форму к каноническому (диагональному) виду методом ортогональных преобразований. Указать соответствующее преобразование переменных. $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3$.

10. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа. Указать матрицу соответствующего преобразования. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

11. Задана матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. Для каждого значения параметра λ исследовать эту квадратичную форму на знакоопределенность и записать ее канонический вид.

12. В пространстве многочленов степени не выше 1 задан линейный оператор, действующий по правилу $\mathbf{A}x(t) = \int\limits_0^2 (t - s)x(s)ds$. Записать матрицу этого оператора в базисе $1, t$.

13. Симметричный оператор задан матрицей A в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3. Построить ортонормированный базис из собственных векторов, найти матрицу оператора в этом базисе. Указать матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Одна из двух данных матриц является матрицей самосопряженного оператора в некотором (неортогональном) базисе. Установить, какая именно. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

15. В линейной оболочке $L(\cos t, \sin t)$ задан линейный оператор d^2/dt^2. Вычислить матрицу этого оператора в базисе $\cos t, \sin t$, найти его собственные значения и собственные векторы.

16. Вычислить координаты метрического тензора евклидова пространства многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(x(t), y(t)) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$ в базисе $1, t$.

Заведующий кафедрой математики профессор В. Ф. Бутузов