Список вопросов по математическому анализу, вошедших в экзаменационные билеты.
Все остальные вопросы программы могут быть заданы в качестве дополнительных вопросов.

1. **Вопросы на доказательство основных теорем и утверждений.**

    1. Лемма Дарбу.
    2. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций.
    3. Интегрируемость непрерывной функции.
    4. Интегрируемость монотонной функции.
    5. Свойства определенного интеграла.
    6. Формулы среднего значения.
    7. Существование первообразной непрерывной функции.
    8. Формула Ньютона-Лейбница.
    9. Замена переменной в определенном интеграле.
    10. Интегрирование по частям.
    11. Сведение двойного интеграла к повторному.
    12. Замена переменных в двойном интеграле.
    13. Сведение тройного интеграла к повторному.
    14. Формула Грина.
    15. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
    16. Криволинейные интегралы первого рода.
    17. Криволинейные интегралы второго рода.
    18. Необходимое условие дифференцируемости функции m переменных.
    19. Достаточное условие дифференцируемости функции m переменных.
    20. Дифференцируемость сложной функции.
    21. Дифференцирование неявной функции.
    22. Инвариантность формы первого дифференциала.
    23. Производная по направлению и градиент.
    24. Теорема о равенстве смешанных производных.
    25. Формула Тейлора.
    26. Необходимое условие локального экстремума.
    27. Достаточное условие локального экстремума.
    28. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением.
    29. Теорема о дифференцируемости неявной функции, определяемой одним уравнением.
    30. Необходимое условие Лагранжа условного экстремума.
    31. Теорема Кантора.

2. **Задачи**

1. Доказать формулу Дирихле $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx, \quad (a>0)$
2. Доказать, что для непрерывной четной на $[-l,l]$ функции $f(x)$ справедливо $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$
3. Применяя теорему о среднем, доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = 0$
4. Доказать, что для непрерывной нечетной на $[-l,l]$ функции $f(x)$ справедливо $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$
5. Доказать неинтегрируемость функции Дирихле.
6. Пусть $|f(x)|$ – интегрируемая функция. Следует ли из этого, что $f(x)$ интегрируемая функция?
7. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, где $G:\ x^2+y^2>9 \cap x^2+y^2<25$
8. Доказать, что если C – замкнутый контур и $\mathbf{l}$ – произвольное направление, то $\oint\limits_C \cos(\mathbf{l},\mathbf{n})ds = 0$
9. Найти значение интеграла $I = \oint\limits_C [x\cos(\mathbf{n},x) + y\cos(\mathbf{n},y)]ds$ где C – простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S, и $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к ней.
10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, где C - окружность $x^2+y^2=1$. 11. $\oint\limits_C (x+y)dy-(x-y)dx$, где C - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

13. Показать, что для функции $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ оба повторных предела $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$, $\quad \lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ не существуют, а $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y) = 0$.

14. Показать, что для функции $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y) = 1$, $\quad \lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y) = -1$, а $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ не существует.

15. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 16. Найти $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x}$

17. Доказать, что функция
$$u = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
непрерывна в точке $O(0,0)$ по каждой переменной x и y, но не является непрерывной по совокупности переменных.

18. Исследуйте функцию
$$u = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4 \neq 0 \\ 0, & x^4+y^4 = 0 \end{cases}$$
на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных в точке $(0,0)$.

19. Доказать равномерную непрерывность на всей плоскости функции $u = e^{-(x^2+y^2)}$
20. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(y)$ имеют производные соответсвенно в точках x_0 и y_0, то функция $u(x,y) = f(x)+g(y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0).
21. функция $u(x,y) = f(x)g(y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0).
22. Разложить функцию по формуле Маклорена до членов второго порядка $u = \sqrt{1-x-y}$
23. Разложить функцию по формуле Маклорена до членов третьего порядка $u = \ln(1+x+y)$
24. Доказать, что функции $y_1 = x_1+x_2$ и $y_2 = x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0,0)$
25. Доказать, что функции $u_1 = xy$ и $u_2 = \dfrac{x}{y}$ независимы в любой окрестности точки $(0,1)$
26. Найти точки условного экстремума функции $z = x+y$, если $x^2+y^2=1$.
27. Методом Лагранжа найти точки условного экстремума функции $z = xy$, если $x+y=2$.
28. Найти точки условного экстремума функции $z = x^2+y^2$, если $x+y=1$.